I topoi di Grothendieck come ‘ponti’ unificanti in Matematica

Olivia Caramello

(Università degli Studi dell’Insubria - Como)

Collegio Ghislieri, Pavia
2 aprile 2019

La "nozione unificatrice" di topos

In questo seminario il termine 'topos' significherà sempre 'topos di Grothendieck'.

"C'est le thème du topos qui est ce "lit", ou cette "rivière profonde" où viennent s'épouser la géométrie et l'algèbre, la topologie et l'arithmétique, la logique mathématique et la théorie des catégories, le monde du continu et celui des structures "discontinues" ou "discrètes". Il est ce que j'ai conçu de plus vaste, pour saisir avec finesse, par un même langage riche en résonances géométriques, une "essence" commune à des situations des plus éloignées les unes des autres provenant de telle région ou de telle autre du vaste univers des choses mathématiques".

A. Grothendieck

A partire dalla mia tesi di dottorato, mi sono occupata di sviluppare una teoria e delle tecniche che permettano di cominciare a dare corpo alla visione di Grothendieck, fondandomi sulla nozione di topos classificatore introdotta dai logici.

I topoi comme 'ponti' unificanti

Questa teoria, introdotta nel testo programmatico "*The unification of Mathematics via Topos Theory*" del 2010, permette di sfruttare la flessibilità tecnica inerente alla nozione di topos - più precisamente la possibilità di rappresentare un topos in una moltitudine di modi diversi - per costruire dei 'ponti' utili a unificare e trasferire nozioni, idee e risultati tra teorie matematiche distinte.

Negli ultimi anni, oltre a condurre alla risoluzione di problemi aperti da molto tempo in logica categoriale, queste tecniche hanno generato diverse applicazioni non-triviali in differenti campi della matematica, ma molto resta ancora da fare affinché i topoi diventino uno strumento chiave universalmente utilizzato per lo studio delle teorie matematiche e delle loro relazioni.

Di fatto, questi 'ponti' si sono rivelati utili non solo per collegare tra loro teorie matematiche differenti ma anche per studiare una data teoria matematica da molteplici punti di vista.

Alcune applicazioni

- Teoria dei modelli (interpretazione e generalizzazione topos-teoretica del teorema di Fraïssé)
- Teoria della dimostrazione (nuovi sistemi dimostrativi per le teorie geometriche)
- Algebra (generalizzazione topos-teoretica del formalismo Galoisiano)
- Topologia (interpretazione/generazione di dualità di tipo Stone e Priestley)
- Analisi funzionale (risultati sugli spettri di Gelfand e le compattificazioni di Wallman)
- Gruppi reticolati e MV-algebre (articoli con la mia (ex) studentessa di dottorato A.C. Russo)
- Strutture cicliche introdotte da A. Connes et C. Consani (lavoro sulle "teorie cicliche" con il mio (ex) studente di master N. Wentzlaff)
- Geometria algebrica (generalizzazione dei motivi di Nori con L. Barbieri-Viale e L. Lafforgue, e approccio logico al problema dell'indipendenza da ℓ)

Piano del seminario

- Il concetto di unificazione
- Preliminari di teoria dei topoi
- Il metodo di costruzione dei 'ponti'
- Alcuni esempi di 'ponti'
- Prospettive future

'Unificare' la matematica

- La teoria degli insiemi ha rappresentato il primo serio tentativo della logica di unificare la matematica almeno sul piano del linguaggio.
- Successivamente, la teoria delle categorie ha offerto un linguaggio astratto alternativo in cui la maggior parte della matematica può essere formulata.

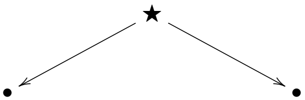
Tuttavia, entrambi questi sistemi realizzano un'unificazione che è alquanto limitata nel suo scopo nel senso che, per quanto essi offrano un modo per esprimere e organizzare la matematica in un singolo linguaggio, essi non forniscono metodi per un effettivo trasferimento di conoscenza tra settori distinti.

Al contrario, i topoi permettono di collegare efficacemente differenti teorie matematiche tra di loro, e di studiare una data teoria attraverso una molteplicità di punti di vista differenti, offrendo quindi un approccio più sostanziale al problema di 'unificare la matematica'.

Il concetto di unificazione

Possiamo distinguere due diversi tipi di unificazione.

- Unificazione 'statica' (attraverso una generalizzazione): due concetti sono visti come istanze di uno più generale:



- Unificazione 'dinamica' (attraverso una costruzione): due oggetti sono collegati tra loro attraverso un terzo oggetto (normalmente costruito a partire da ciascuno di essi separatamente), che svolge la funzione di 'ponte' permettendo un trasferimento di informazione tra di essi.

Il trasferimento di informazione risulta dal processo di 'traduzione' di proprietà dell'oggetto 'ponte' (rispettivamente costruzioni su di esso) in termini di proprietà dei due oggetti (rispettivamente costruzioni su di essi).

La natura multiforme dei topoi

I topoi sono oggetti particolarmente multiformi, che possono essere efficacemente studiati utilizzando una molteplicità di punti di vista differenti.

Di fatto, un topos può essere visto come:

- uno spazio generalizzato
- un universo matematico
- una teoria modulo 'Morita-equivalenza'

Richiamiamo ora brevemente ciascuno di questi differenti punti di vista.

Topoi come spazi generalizzati

- La nozione di topos è stata introdotta da A. Grothendieck con l'obiettivo di portare un'intuizione geometrica anche in contesti in cui non esistevano spazi topologici in senso stretto.
- Grothendieck ha realizzato che molte importanti proprietà di uno spazio topologico X possono essere naturalmente formulate come proprietà (invarianti) della categoria $\mathbf{Sh}(X)$ di fasci di insiemi su di esso.
- Ha quindi definito i topoi come categorie più generali di fasci di insiemi, rimpiazzando lo spazio topologico X con una coppia $(\mathscr{C}, J)$ che consiste di una (piccola) categoria $\mathscr{C}$ e di una 'nozione generale di ricoprimento' J su di essa, e prendendo i fasci (in un senso generalizzato) sopra tale coppia:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed] \arrow[d, rightsquigarrow] & \mathbf{Sh}(X) \arrow[d, rightsquigarrow] \\ (\mathscr{C}, J) \arrow[r, dashed] & \mathbf{Sh}(\mathscr{C}, J) \end{tikzcd}$$

Topoi come universi matematici

Un decennio dopo, W. Lawvere and M. Tierney hanno scoperto che un topos può essere visto non solo come uno spazio generalizzato ma anche come un universo matematico in cui si può fare matematica in modo del tutto analoga a quanto si fa nel contesto classico degli insiemi (con la sola importante eccezione che occorre ragionare costruttivamente).

Tra le altre cose, questa scoperta ha permesso di:

- Sfruttare la 'flessibilità' inerente alla nozione di topos per costruire 'nuovi mondi matematici' con particolari proprietà.
- Considerare modelli di qualsivoglia teoria matematica non solo nel contesto insiemistico classico, ma all'interno di ogni topos, e quindi di 'relativizzare' la matematica.

Topoi come teorie (modulo Morita-equivalenza)

Negli anni '70, grazie al lavoro di diversi logici/categoristi, tra cui in particolare M. Makkai e G. Reyes, è stato scoperto che:

- Ad ogni teoria matematica $\mathbb{T}$ (di una certa forma molto generale) si può associare canonicamente un topos $\mathscr{E}_{\mathbb{T}}$, detto il topos classificatore della teoria, che rappresenta il suo 'cuore semantico'.
- Due teorie matematiche hanno lo stesso topos classificatore (a meno di equivalenza) se e solo se hanno lo stesso 'cuore semantico', ovvero se e solo se esse sono indistinguibili da un punto di vista semantico; tali teorie sono dette Morita-equivalenti.
- Reciprocamente, ogni topos è il topos classificatore di una qualche teoria.
- Un topos può quindi essere visto come un rappresentante canonico di classi di equivalenza di teorie modulo Morita-equivalenza.

Topoi come teorie (modulo Morita-equivalenza)

Negli anni '70, grazie al lavoro di diversi logici/categoristi, tra cui in particolare M. Makkai e G. Reyes, è stato scoperto che:

- Ad ogni teoria matematica $\mathbb{T}$ (di una certa forma molto generale) si può associare canonicamente un topos $\mathscr{E}_{\mathbb{T}}$, detto il topos classificatore della teoria, che rappresenta il suo 'cuore semantico'.
- Due teorie matematiche hanno lo stesso topos classificatore (a meno di equivalenza) se e solo se hanno lo stesso 'cuore semantico', ovvero se e solo se esse sono indistinguibili da un punto di vista semantico; tali teorie sono dette Morita-equivalenti.
- Reciprocamente, ogni topos è il topos classificatore di una qualche teoria.
- Un topos può quindi essere visto come un rappresentante canonico di classi di equivalenza di teorie modulo Morita-equivalenza.

Topoi come 'ponti'

- La nozione di Morita-equivalenza formalizza in molte situazioni la sensazione di 'guardare la stessa cosa da diversi punti di vista' o 'costruire uno stesso oggetto in modi diversi', il che spiega la sua ubiquità in matematica.
- In effetti, molte importanti dualità ed equivalenze in matematica possono essere naturalmente interpretate come risultanti da Morita-equivalenze.
- D'altro canto, la teoria dei topoi stessa è una fonte primaria di Morita-equivalenze. In effetti, rappresentazioni differenti dello stesso topos possono essere interpretate come Morita-equivalenze tra differenti teorie matematiche.
- Inoltre, la nozione di Morita-equivalenza cattura il dinamismo intrinseco al concetto stesso di teoria matematica: in effetti, una teoria da sola genera un numero infinito di Morita-equivalenze.
- Due teorie bi-interpretabili (ovvero tra le quali esiste un 'dizionario') sono Morita-equivalenti, ma il viceversa non vale!

Topoi come 'ponti'

- L'esistenza di differenti teorie con lo stesso topos classificatore si traduce, a livello tecnico, nell'esistenza di differenti rappresentazioni dello stesso topos.
- Gli invarianti topos-teoretici possono quindi essere usati per trasferire informazioni da una teoria all'altra:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathscr{E}_{\mathbb{T}} \simeq \mathscr{E}_{\mathbb{T}'} \arrow[dr, dashed, bend left] & \\
\mathbb{T} \arrow[ur, dashed, bend left] & & \mathbb{T}'
\end{tikzcd}
$$

- Il trasferimento di informazioni avviene esprimendo un dato invariante in termini delle differenti rappresentazioni del topos.
- Differenti proprietà (rispettivamente costruzioni) nel contesto di teorie classificate dallo stesso topos vengono a essere interpretate come differenti *manifestazioni* di un'*unica* proprietà (rispettivamente costruzione) che vive al livello dei topoi.

Topoi come 'ponti'

- Queste metodologie sono tecnicamente efficaci in quanto la relazione tra un topos e le sue rappresentazioni è molto naturale, il che permette di trasferire invarianti attraverso differenti rappresentazioni (e quindi, attraverso differenti teorie) in maniera tecnicamente fattiva benché in generale non-triviale.
- Ogni invariante topos-teoretico genera un'autentica morfogenesi matematica, risultante dalla sua espressione in termini delle differenti rappresentazioni dei topoi, che dà luogo in generale a proprietà concretamente completamente diverse e apparentemente scollegate.
- L'esplorazione matematica è quindi in un certo senso 'rovesciata' in quanto guidata dalle Morita-equivalenze e dagli invarianti topos-teoretici, a partire dai quali uno procede per estrarre informazioni concrete rilevanti per le teorie che intende studiare.

Topoi come 'ponti'

- Queste metodologie sono tecnicamente efficaci in quanto la relazione tra un topos e le sue rappresentazioni è molto naturale, il che permette di trasferire invarianti attraverso differenti rappresentazioni (e quindi, attraverso differenti teorie) in maniera tecnicamente fattiva benché in generale non-triviale.
- Ogni invariante topos-teoretico genera un'autentica morfogenesi matematica, risultante dalla sua espressione in termini delle differenti rappresentazioni dei topoi, che dà luogo in generale a proprietà concretamente completamente diverse e apparentemente scollegate.
- L'esplorazione matematica è quindi in un certo senso 'rovesciata' in quanto guidata dalle Morita-equivalenze e dagli invarianti topos-teoretici, a partire dai quali uno procede per estrarre informazioni concrete rilevanti per le teorie che intende studiare.

Il teorema di Fraïssé come un triplo 'ponte'

La seguente ampia generalizzazione del teorema di Fraissé in teoria dei modelli scaturisce naturalmente da un triplo 'ponte'.

Definizione

Una teoria geometrica si dice di tipo prefascio se è classificata da un topos di prefasci.

Ogni teoria $\mathbb{T}$ di tipo prefascio è classificata dal topos $[\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set}), \mathbf{Set}]$, dove $\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})$ è la categoria dei suoi modelli di presentazione finita.

Definizione

Un modello insiemistico M di una teoria geometrica $\mathbb{T}$ si dice omogeneo se per ogni freccia $y : c \to M$ in $\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})$ e ogni freccia f in $\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})$ esiste una freccia u in $\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})$ tale che $u \circ f = y$:

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "y"] \arrow[d, "f"'] & M \\
d \arrow[ur, dashed, "u"'] &
\end{tikzcd}
$$

Teorema

Sia $\mathbb{T}$ una teoria di tipo prefascio tale che la categoria $\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})$ è non vuota e soddisfa AP e JEP. Allora la teoria $\mathbb{T}'$ dei $\mathbb{T}$-modelli omogenei è atomica e completa.

Il teorema di Fraïssé come un triplo 'ponte'

Topos atomico

$\mathbf{Sh}(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{at}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})$

$(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{at})$

Sito atomico i.e.
AP su f.p.$\mathbb{T}$-mod(**Set**)

$(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})$

Atomicità di $\mathbb{T}'$

Topos bivalente

$\mathbf{Sh}(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{at}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})$

$(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{at})$

JEP su f.p.$\mathbb{T}$-mod(**Set**)

$(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})$

Completezza di $\mathbb{T}'$

Punto di

$\mathbf{Sh}(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{at}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})$

$(\text{f.p.}\mathbb{T}\text{-mod}(\mathbf{Set})^{\text{op}}, J_{at})$

$\mathbb{T}$-modello omogeneo in **Set**

$(\mathscr{C}_{\mathbb{T}'}, J_{\mathbb{T}'})$

$\mathbb{T}'$-modello in **Set**

Dualità di tipo Stone attraverso 'ponti'

La tecnica dei 'ponti' permette di unificare tutte le classiche dualità di tipo Stone tra preordini e posets, locales o spazi topologici come istanze di un'unico fenomeno topos-teoretico, e di generare molte altre dualità.

Più precisamente, questa tecnica genera dualità/equivalenze di tipo Stone funtorializzando 'ponti' della forma

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Sh}(\mathscr{C}, J_{\mathscr{C}}) \simeq \mathbf{Sh}(\mathscr{D}, K_{\mathscr{D}}) & \\ \mathscr{C} \arrow[ur, dash, dashed] & & \mathscr{D} \arrow[ul, dash, dashed] \end{tikzcd}$$

dove

- $\mathscr{C}$ e $\mathscr{D}$ sono preordini (visti come categorie),
- $\mathscr{C}$ è $K_{\mathscr{D}}$-densa in $\mathscr{D}$ e $J_{\mathscr{C}}$ è la topologia di Grothendieck $(K_{\mathscr{D}})|_{\mathscr{C}}$ indotta su $\mathscr{C}$ da una topologia di Grothendieck $K_{\mathscr{D}}$ sottocanonica su $\mathscr{D}$.

Il programma dei topoi come 'ponti' unificanti

I risultati ottenuti finora mostrano che i topoi possono effettivamente giocare il ruolo di 'ponti' per trasferire informazioni tra differenti teorie matematiche.

Contiamo quindi di proseguire la ricerca in questa direzione per sviluppare ulteriormente il potenziale unificante della nozione di topos. Temi centrali in questo programma saranno:

- studio di dualità o corrispondenze importanti in matematica da un punto di vista topos-teoretico (in particolare, la teoria dei motivi e il programma di Langlands)
- studio sistematico degli invarianti dei topoi in termini delle loro rappresentazioni, e introduzione di nuovi invarianti che catturino aspetti essenziali di problemi matematici concreti
- introduzione di nuove metodologie per generare delle Morita-equivalenze
- interpretazione e generalizzazione di parti importanti della teoria dei modelli (sia classica che moderna) in termini di topoi e sviluppo di una teoria funtoriale dei modelli
- Automazione della tecnica di costruzione dei ponti in modo da ottenere un *proof assistant* capace di generare meccanicamente nuovi risultati all'interno di teorie matematiche formalizzate

Possibili applicazioni in altri settori

Lo sviluppo di queste tecniche unificatrici, e delle idee generali che ad esse sottindendono, è suscettibile di gettare luce anche in ambito extra-matematico, ad esempio in

- Fisica (e.g., analisi e interpretazione di dualità, topoi per la teoria della relatività e la meccanica quantistica)
- Informatica (e.g., semantica dei linguaggi di programmazione e dimostrazione automatica di teoremi)
- Linguistica (e.g., sintassi e semantica dei linguaggi naturali, studi comparativi e teoria della traduzione)
- Filosofia (e.g., metodologia della scienza, ontologia dei concetti matematici)
- Teoria Musicale (e.g., analisi della composizione, dell'interpretazione e dell'esecuzione)
- Finanza (gestioni azionarie basate su 'ponti' tra titoli - v. sistema *Up-Down Forecast*)

Per approfondire

O. Caramello
Grothendieck toposes as unifying 'bridges' in Mathematics,
Mémoire d'habilitation à diriger des recherches,
Université de Paris 7, 2016,
disponibile sul mio sito www.oliviacaramello.com.

O. Caramello.
Theories, Sites, Toposes: Relating and studying mathematical theories through topos-theoretic 'bridges',
Oxford University Press, 2017.