Pierluigi Minari
Università di Firenze & Collegio Ghislieri
minari@unifi.it

Teoria della dimostrazione: un’introduzione

Ciclo di conferenze
Teoria della dimostrazione: tra matematica e filosofia
Collegio Ghislieri, Pavia, 9 Aprile 2019

- Hilbert: la *Beweistheorie*
- L’impatto dei teoremi limitativi di Gödel
- Gentzen: programma hilbertiano esteso e nascita della (odierna) *proof theory*
- La teoria ‘’post-hilbertiana’’ della dimostrazione: ***reductive*** proof theory
- La teoria ‘’post-hilbertiana’’ della dimostrazione: ***structural*** proof theory
- “Proof Theory on the eve of Year 2000”

David Hilbert (1862-1943)

La *Beweistheorie* (o *metamatematica*) hilbertiana

- E’ la disciplina matematica che ha per oggetti quei particolari ‘**testi’, o complessi finiti di simboli**, che sono le **dimostrazioni formali** in una teoria completamente formalizzata (linguaggio, assiomi specifici, calcolo logico)
- Ha un fine <u>ben preciso e circoscritto</u>
- Deve avvalersi esclusivamente di metodi **finitari** di indagine
- E’ lo strumento chiave del **programma hilbertiano**

Il programma hilbertiano (≈ 1920 –)

- Inizio secolo: antinomie insiemistiche (e non solo), ‘crisi dei fondamenti’, ‘Grundlagenstreit’
- I metodi definitori e deduttivi che fanno uso dell’infinito attuale sono a rischio
- Hilbert: <u>NON</u> bandire l’infinito attuale dalla matematica, come fanno gli intuizionisti. «**Nessuno potrà cacciarci dal paradiso che Cantor ha creato per noi»**
- <u>MA</u>: giustificare l’infinito e il suo intervento nei ragionamenti matematici, mostrando che esso, unito a quella parte della matematica che consiste di asserzioni concretamente verificabili e dunque inattaccabili da dubbi (*matematica finitaria*), è innocuo, ossia non è capace di produrre contraddizioni

Matematica contenutistica classica = matematica <u>finitaria</u> + elementi <u>ideali</u>

«Come venne introdotto $i = \sqrt{-1}$ per poter mantenere nella forma più semplice le leggi dell'algebra, per esempio quelle relative all'esistenza e al numero delle radici di un'equazione [...], analogamente si devono aggiungere le asserzioni ideali a quelle finitiste per poter conservare le semplici regole formali dell'ordinaria logica aristotelica.

Ma [...] non dobbiamo dimenticare qual è la condizione essenziale del nostro lavoro. **C'è infatti una condizione, una sola ma assolutamente indispensabile, cui è sottoposto l'uso del metodo degli elementi ideali, cioè una *dimostrazione di coerenza*.**

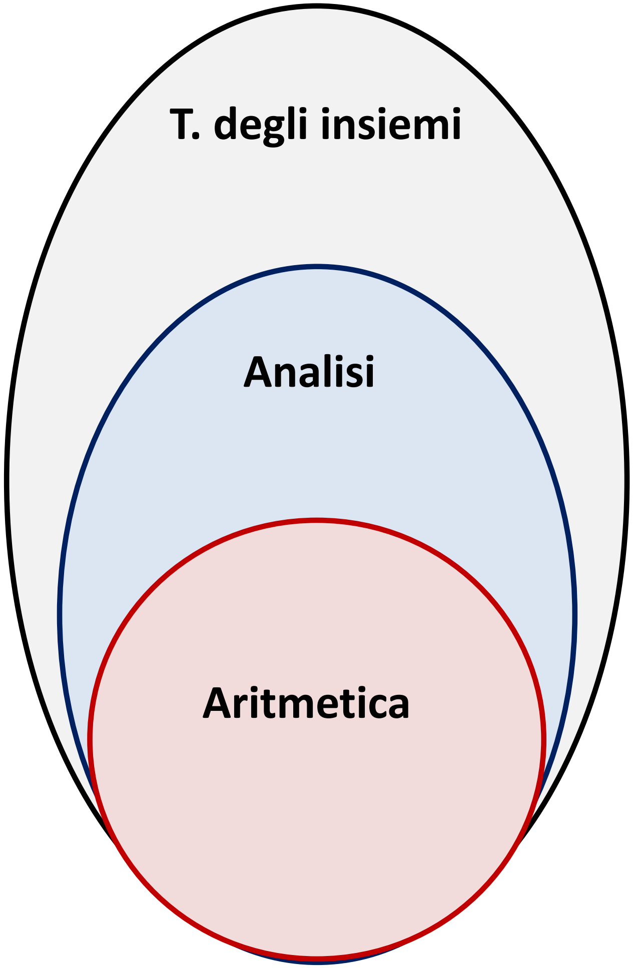
L'estensione di un dominio con l'aggiunta di elementi ideali è legittima solo se non dà luogo a contraddizioni nel vecchio e più ristretto dominio.

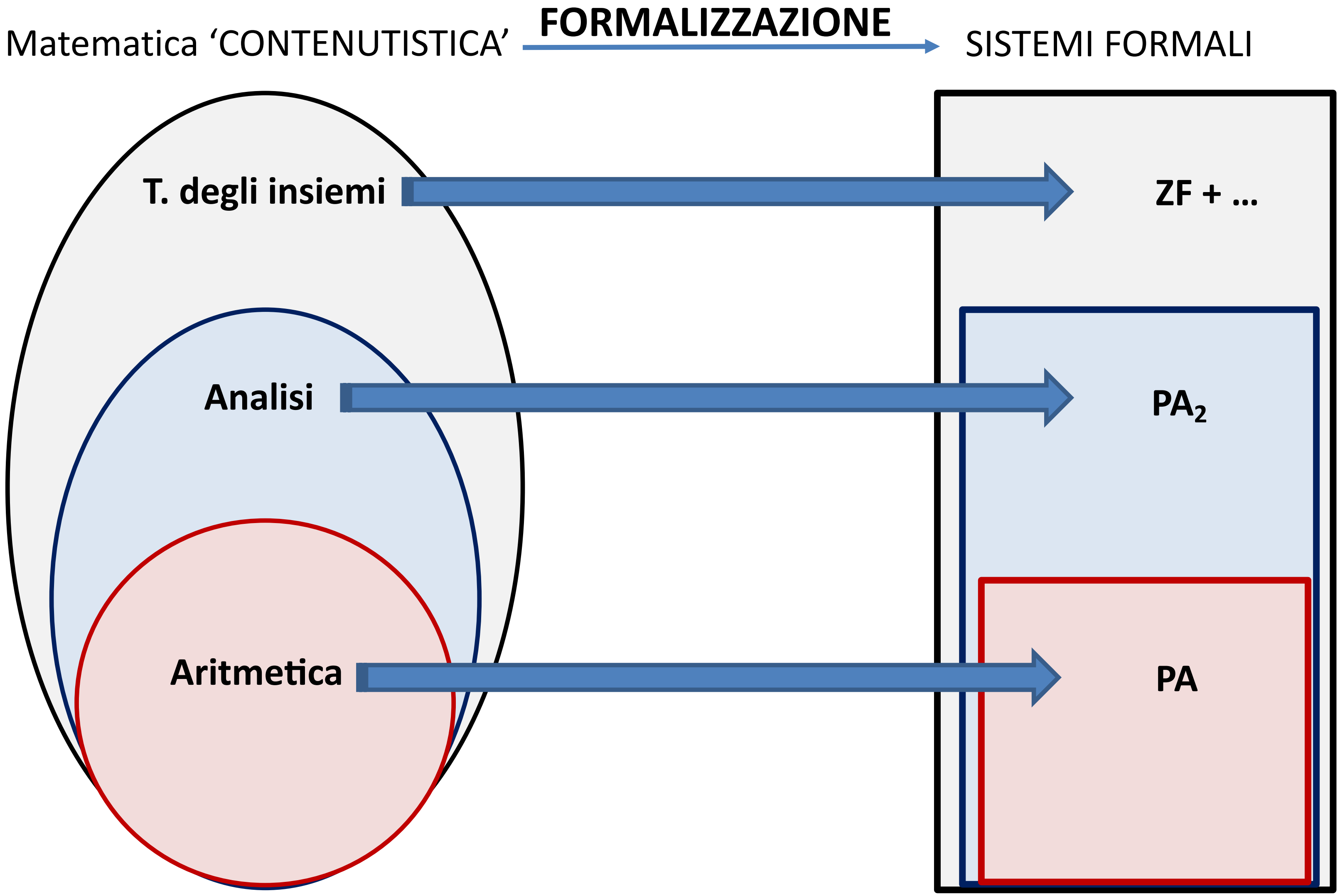
Il problema della coerenza […] si riduce ovviamente a quello di mostrare che, partendo dagli assiomi e applicando le regole stabilite, non si può avere come ultima formula di una dimostrazione la formula "$1 \neq 1$". Tale compito rientra essenzialmente nell'ambito della trattazione intuitiva […]

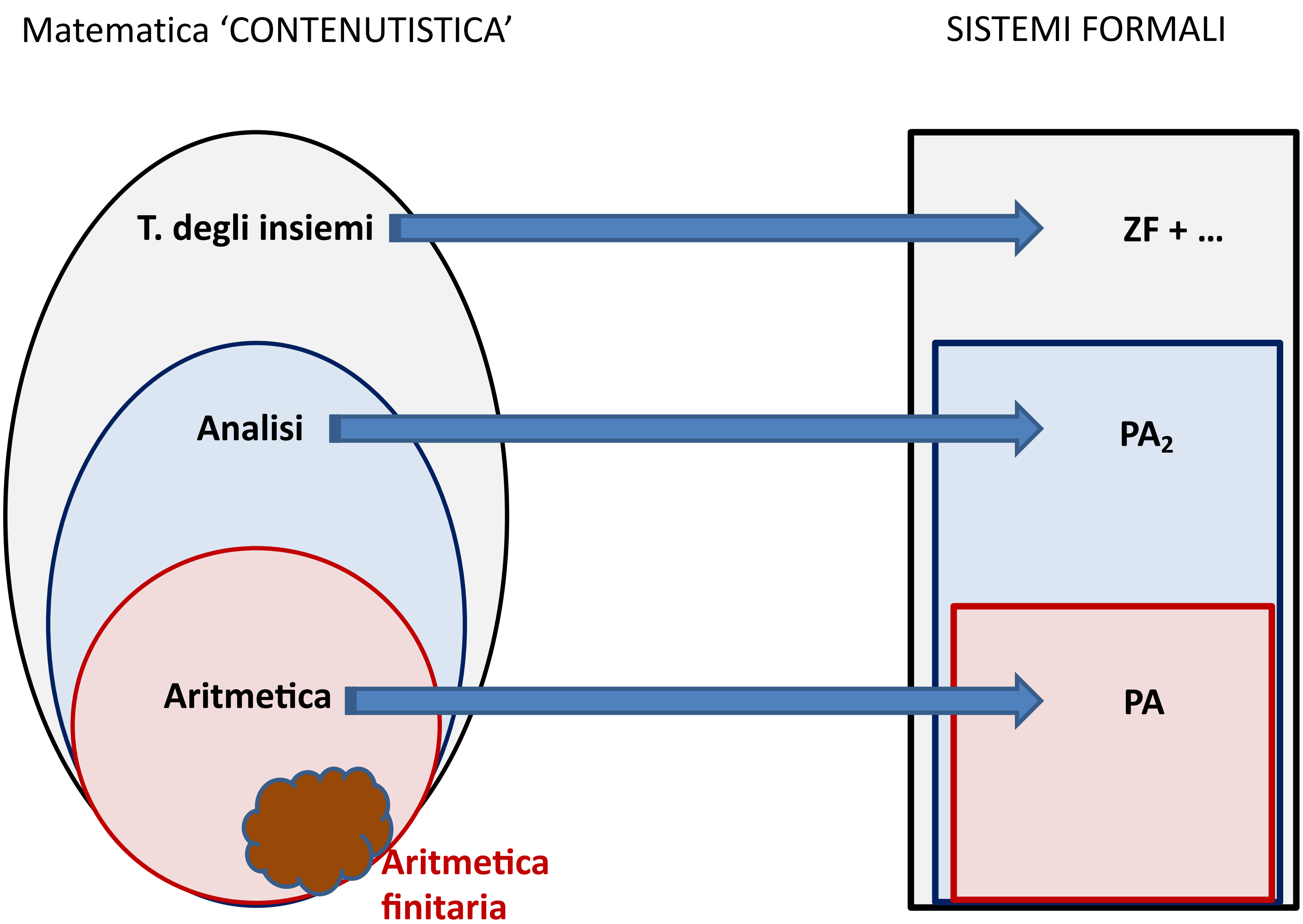
Una dimostrazione formalizzata è un oggetto intuitivo e visibile, come i segni numerici. È interamente comunicabile. Anche la proprietà che deve avere la sua ultima formula, cioè di essere "$1 \neq 1$", è una proprietà concreta, controllabile. E dato che, di fatto, si può mostrare che è impossibile dare una dimostrazione la cui ultima formula sia la formula in questione, risulta giustificata l'introduzione delle asserzioni ideali.»

(*Über das Unendliche*, 1925-26)

Matematica 'CONTENUTISTICA'

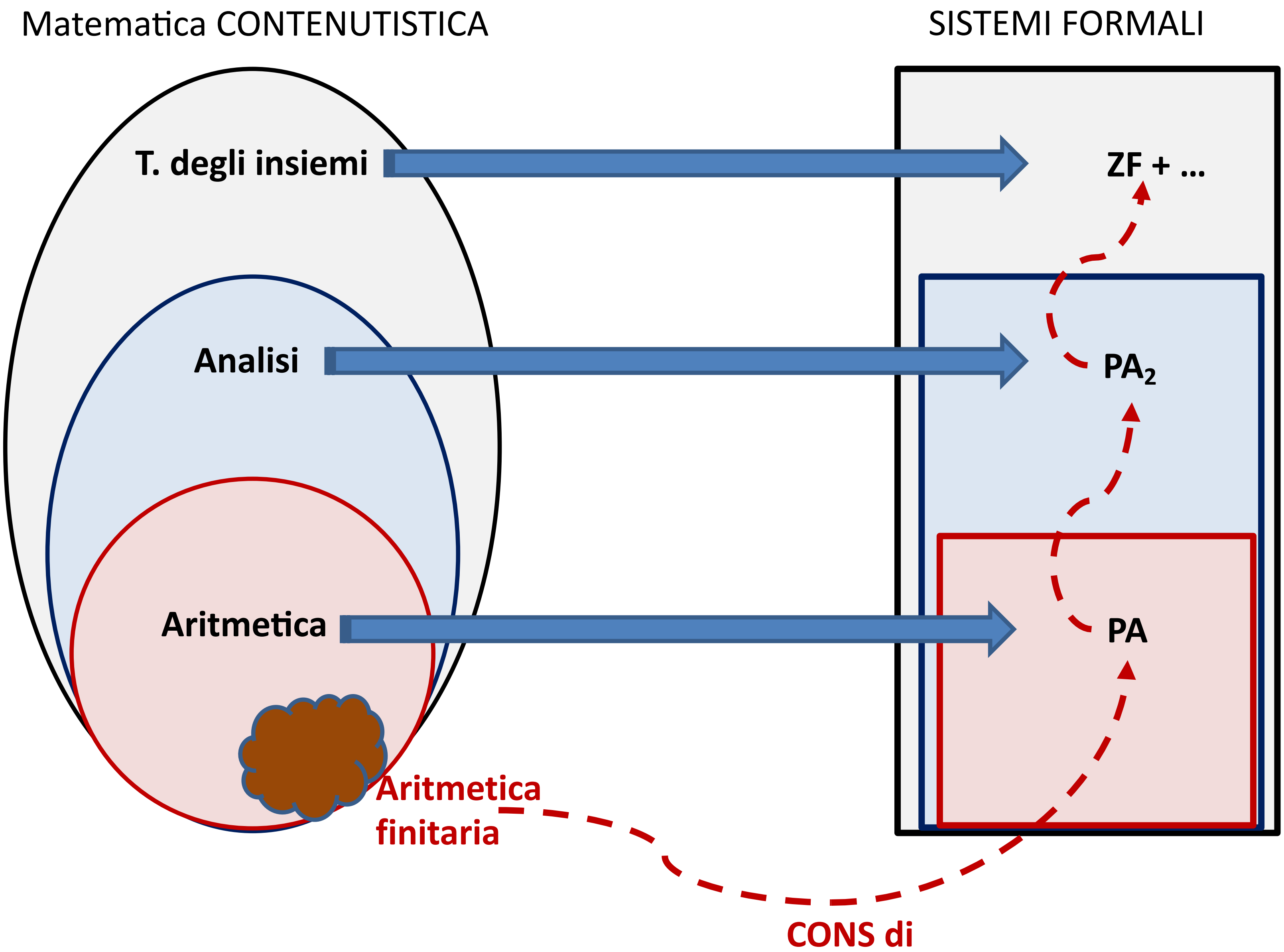



Matematica ‘CONTENUTISTICA’
FORMALIZZAZIONE
SISTEMI FORMALI
T. degli insiemi
ZF + …
Analisi
PA$_2$
Aritmetica
PA



Matematica ‘CONTENUTISTICA’
SISTEMI FORMALI
T. degli insiemi
ZF + …
Analisi
PA_2
Aritmetica
PA
Aritmetica finitaria

LA BEWEISTHEORIE



La scuola di Hilbert al lavoro (1920-30)

- Una fortissima squadra di collaboratori:
  P. Bernays, J. von Neumann, W. Ackermann, …
- Sviluppo di tecniche metamatematiche raffinate
  (calcolo dell'*epsilon, …*)
- Qualche risultato parziale. Es.:
  dimostrazione di consistenza dell'aritmetica di Peano
  <u>con induzione ristretta a formule senza quantificatori</u>
- Solide aspettative sul successo del programma

Kurt Gödel (1906-1978)

I teoremi limitativi di Gödel (1930-31) e il loro impatto sul programma hilbertiano

Teorema I (*incompletezza*). Ogni sistema formale effettivo e consistente T che contiene un minimo di aritmetica(*) è sintatticamente incompleto; ossia: esiste (*si può esibire*) una proposizione G_T nel linguaggio di T che T né dimostra né refuta.

→ Impossibile ridurre **verità$_C$** a **dimostrabilità in un sistema formale$_C$**

(*) Basta che T dimostri gli assiomi della teoria Q (R. Robinson):

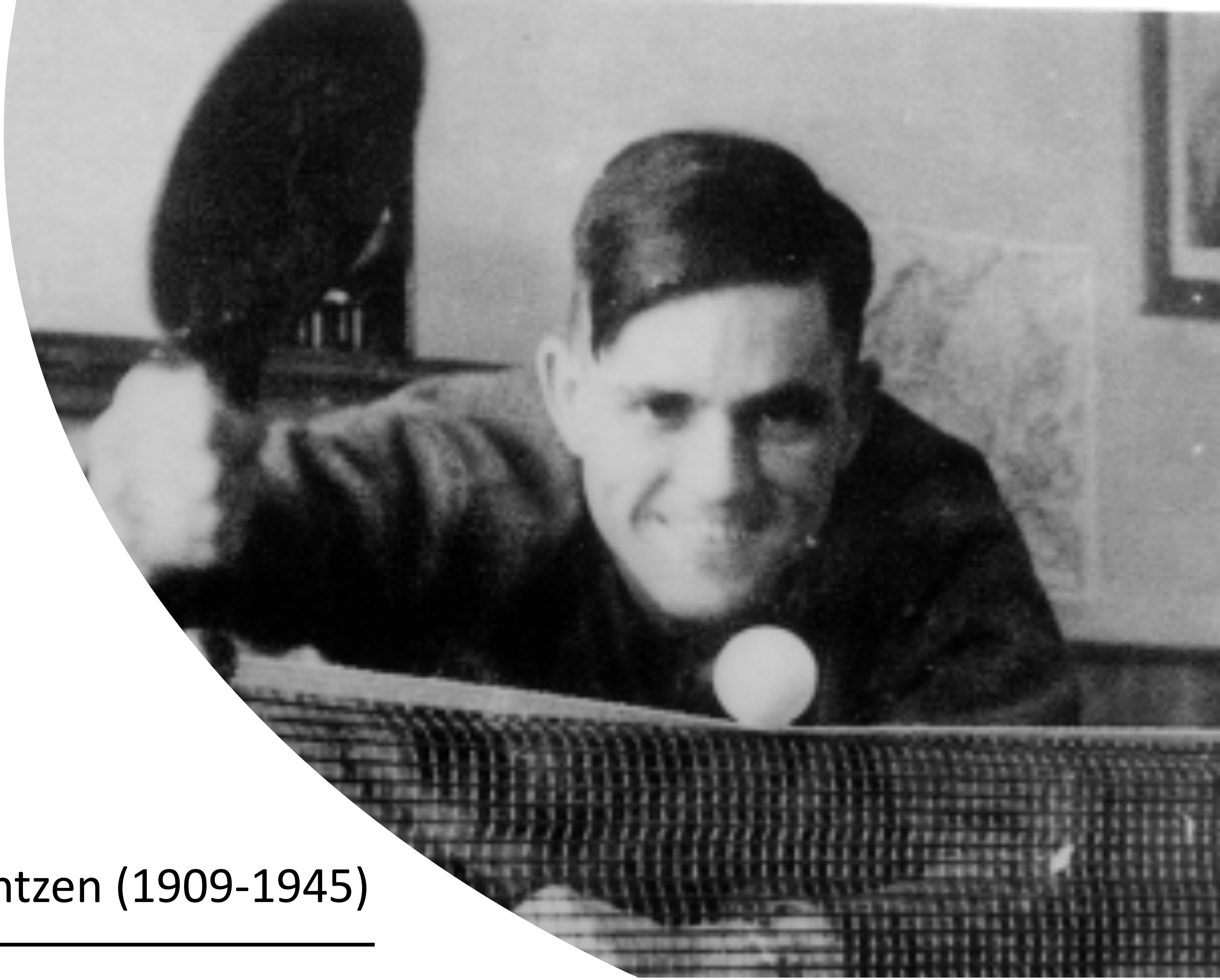
1. $\forall x(0 \neq x')$
2. $\forall x \forall y(x' = y' \to x = y)$
3. $\forall x \forall y(x + 0 = x \wedge x + y' = (x + y)')$
4. $\forall x \forall y(x \cdot 0 = 0 \wedge x \cdot y' = (x \cdot y) + x)$
5. $\forall x(x \neq 0 \to \exists y(x = y'))$

I teoremi limitativi di Gödel (1930-31) e il loro impatto sul programma hilbertiano

Teorema II. Nessun sistema formale effettivo e consistente T che contiene PA (basta di meno …) è in grado di dimostrare (la formula che formalizza naturalmente nel linguaggio di T) la propria consistenza:

$$T \nvdash cons_T$$

→ Impossibile una dimostrazione FINITARIA di consistenza dell’aritmetica (PA), di PA_2 ecc.,
se per strumenti finitari si intende
strumenti che siano comunque formalizzabili in PA



Gerhard Gentzen (1909-1945)

- 1938: dimostrazione di non contraddittorietà dell'aritmetica PA (preceduta da due altre dimostrazioni nel 1935-36)
- Fa uso di strumenti finitari <u>più un principio costruttivamente giustificabile ma non dimostrabile in PA</u>, **TI(ε_0)**:
'induzione transfinita fino a ε_0'
- Sfrutta in maniera essenziale un calcolo per la logica del primo ordine di tipo *analitico*, il calcolo delle sequenze da lui introdotto nel 1934-35, e le proprietà di questo calcolo

ʼʼReductiveʼʼ proof-theory

- **Ordinal analysis** (K. Schütte, G. Takeuti, … i ‘panzer’ tedeschi: W. Pohlers, W. Buchholz, G. Jäger, M. Rathjen, …): classificazione ordinale di sottosistemi dell’analisi (PA_2) e della teoria degli insiemi
- **Proof-theoretic reductions** (G. Kreisel, S. Feferman, …): conservatività di teorie ‘forti’ su teorie ‘deboli’, teorie ‘impredicative’ su teorie ‘predicative’, teorie ‘classiche’ su teorie ‘costruttive’ … , <u>per classi significative di formule</u>
- **Reverse mathematics** (H. Friedman, S. Simpson, …): dai teoremi matematici agli assiomi (logico-insiemistici)

’’Structural’’ proof-theory

- Studio delle proprietà delle dimostrazioni formali in calcoli analitici per *logiche classiche e non classiche*
- Dimostrazioni ‘in forma normale’
- Estrazione di informazioni da dimostrazioni in forma normale
- Dimostrazioni normali in sistemi costruttivi: estrazione di algoritmi
- Prove costruttive in ambito metalogico
- …

XXIV problema di Hilbert

1900 (2000):

«The 24th problem in my Paris lecture was to be: Criteria of simplicity, or proof of the greatest simplicity of certain proofs. Develop a theory of the method of proof in mathematics in general. Under a given set of conditions there can be but one simplest proof.»

B. Bolzano, Wissenschaftslehre (1837)

Proof Theory on the eve of Year 2000
S. Feferman

- What are, or should be the aims of proof theory?
- How well has it met those aims?
- What developments or specific achievements stand out?
- What, now, are the main open problems?
- Are there any neglected directions in proof theory?

W. Pohlers

Proof theory has become a quite heterogenous field. As I see it there are two main domains:
I. Basic (or perhaps better Structural) Proof Theory
II. Pure (Mathematical) Proof Theory

I. The domain of structural proof theory comprises the study of formal proof figures including the study of non classical logics and manipulations on proof figures. Structural proof theory seems to have applications in computer science. Extraction of programs from proofs may serve as an example for possible applications. Another example is automated theorem proving.

II. My view of Mathematical Proof Theory is influenced by my personal believe in the existence of "the mathematical universe".

I know that our mathematical means do not allow us to explore the mathematical universe as a whole. Therefore the main directions of attack – in my opinion – are:

- developing new means, i.e. designing new axiom systems, new rules, finding new principles, …
- comparing them, judging their reliability, (here I would subsume reductive proof theory, constructive interpretation of prima facie impredicative axiom systems, perhaps also some parts of reverse mathematics)

and

- determining their limits (ordinal analysis). A determination of the limits of an axiom system should also give some answer to the question "what more do we know when can prove a theorem in an analyzed axiom system?".

-

<u>H. Schwichtenberg</u>

It is well known that it is undecidable in general whether a given program meets its specification. In contrast, it can be checked easily by a machine whether a formal proof is correct, and from a constructive proof one can automatically extract a corresponding program, which by its very construction is correct as well. This - at least in principle -opens a way to produce correct software, e.g. for safety-critical applications. Moreover, programs obtained from proofs are `commented' in a rather extreme sense. Therefore it is easy to maintain them, and also to adapt them to particular situations.

Lev Beklemishev

I would not specify particular "aims" in the sense of concrete goals to be achieved. Rather, I would define the subject as broadly as possible, e.g., as the study of the notion of proof and proof systems in all possible variants and aspects. (These systems need not always relate to conventional ones. I would also predict that in the future the variety of *kinds* of proofs we deal with will noticeably increase.)

I think that it is important not to draw any fixed borders of our subject, and to be ready to expand the current areas of interests of proof-theorists. (Compare, for example, with the evolution of the meaning of the subject "geometry" from Euclides through Klein to the contemporary mathematics.)